

1

Условие : Для случайного процесса с независимыми и однородными по времени приращениями вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию

Решение : 1) исходный процесс - $\{X(t), t \geq 0\}$.

Введем : $\{Y(t) = X(t) - X(0), t \geq 0\}$

$Y(t)$ - процесс Леви :

1) $Y(0) = X(0) - X(0) = 0$

2) т.к. $X(t)$ имеет независимые приращения

3) $Y(t+h) - Y(t) = X(t+h) - X(t)$

+ однородность приращений по времени

процесс Леви:

1) $f(0) = 0$

2) f имеет независимые приращения

3) $\forall t \geq 0, \forall h > 0$ случайная величина $f(t+h) - f(t)$ имеет распределение, зависящее только от h .

2) $Y(t) = X(t) - X(0) = X(t) - X(t-1) + X(t-1) - X(t-2) + \dots + X(1) - X(0)$

$EY(t) = E[X(t) - X(t-1) + \dots + X(1) - X(0)] = E(X(t) - X(t-1)) + \dots +$

$+ E(X(1) - X(0)) = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{независимости приращений} \\ \text{однородности распределений} \end{array} \right\}}_{\text{в силу}} = t E(X(1) - X(0)) = t EY(1).$

$X(t) = Y(t) + X(0) = \underbrace{X(t) - X(t-1) + \dots + X(1) - X(0)}_{\text{независимые}} + X(0)$

$\Rightarrow EX(t) = EY(t) + EX(0) = tEY(1) + EX(0).$

3) $DY(t) = D[X(t) - X(t-1)] + \dots + D[X(1) - X(0)] = tDY(1).$

$DX(t) = DY(t) + DX(0) = tDY(1) + DX(0).$

[2]

Условие: Случайный процесс $\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, где ω - неслучайная константа, A и φ - независимы, $M(A) = m$, $D(A) = \sigma^2$, φ - равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\xi(t)$. Доказать, что это стационарный в широком смысле случайный процесс.

Решение:

1) Вычислим мат. ожидание:

$$E \xi(t) = E(A \cos(\omega t + \varphi)) = EA E \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E \cos(\omega t + \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) d\varphi \quad \text{плотность, равная длине отрезка } [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0 \Rightarrow E \xi(t) \equiv \text{const}$$

$$\begin{aligned} 2) K_\xi(t, s) &= \text{cov}(\xi(t), \xi(s)) = E \xi(t) \xi(s) - \underbrace{E \xi(t) E \xi(s)}_{=0} = \\ &= E(A^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega s + \varphi)) = EA^2 E \cos^2(\omega t + \varphi) \cos(\omega s + \varphi) = \\ &= E(A^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega s + \varphi)) = EA^2 E \cos(\omega(t-s)) \cos(\omega(t+s)) = (\sigma^2 + m^2) \cdot \frac{1}{2} \cos(\omega(t-s)) \end{aligned}$$

$$f = \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega s + \varphi) = \frac{1}{2} (\cos(\omega(t+s) + 2\varphi) + \cos(\omega(t-s)))$$

$$E f = \frac{1}{2} \cos(\omega(t-s)) + \frac{1}{2} E \cos(\omega(t+s) + 2\varphi)$$

$$E \cos(\omega(t+s) + 2\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos(\omega(t+s) + 2\varphi) \cdot \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega(t+s) + 2\varphi)}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow K_\xi(t, s) = \frac{\sigma^2 + m^2}{2} \cos(\omega(t-s)) \text{ зависит только от } (t-s)$$

$$3) E(|\xi(t)|^2) = D \xi(t) + (E \xi(t))^2 = D \xi(t)$$

$$E(|\xi(t)|^2) = \text{cov}(\xi(t), \xi(t)) \stackrel{1)}{=} \frac{\sigma^2 + m^2}{2} \cos(\omega(t-t)) = \frac{\sigma^2 + m^2}{2} < \infty$$

$\Rightarrow$ является стационарным в широком смысле.

$\xi(t)$ - стационарный в широком смысле, если

$$1) E(|\xi(t)|^2) < \infty \quad \forall t$$

$$2) E(\xi(t)) \equiv a \quad \forall t$$

$$3) \text{cov}(\xi(t), \xi(s)) = K(t-s), \quad \forall t, s, K - \text{упрощ.}$$

3

Условие
 $w(t)$ - стандартный винеровский процесс. Доказать, что он
 непрерывен в среднем квадратическом, но не является
 дифференцируемым в среднем квадратическом

Решение:

$$1) \mathbb{E}w(t) = 0 = a(t)$$

$$k(t, s) = \text{cov}(w(t), w(s)) =$$

$$= \min(t, s)$$

В силу критерия непрерывности, т.к.

- 1) $a(t)$ - непрерывная
- 2) $k(t, s)$ - непрерывная по
паре аргументов в (t_0, t_0) .

2) $a(t)$ - непрер. дуг.

$$3) k(t, s) = \begin{cases} s, & s < t \\ t, & s \geq t \end{cases}$$

$$\frac{\partial k(t, s)}{\partial t} = \begin{cases} 0, & s < t \\ 1, & s \geq t \end{cases}$$

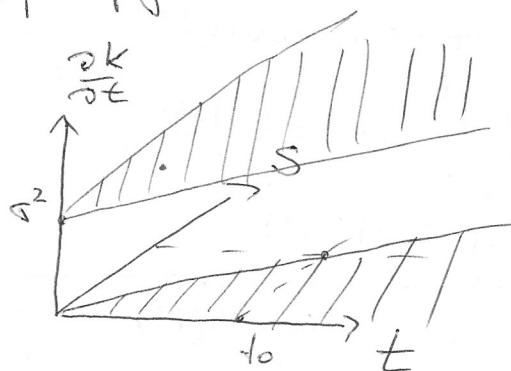
в точках вида (t_0, t_0)

$\frac{\partial^2 k(t, s)}{\partial t \partial s}$ не существует.

$\Rightarrow w(t)$ не является дуг в среднем квадратическом.

Стандартный
 Винеровский процесс:

- 1) $\mathbb{E}w(t) = 0$
 - 2) $\text{cov}(w(t), w(s)) = \sigma^2 \min(t, s)$
- в стандартном $\sigma^2 = 1$



14

Условие: $\xi(t)$ - пуассоновский процесс, $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds$. Вычислить мат ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\eta(t)$.

Решение:

1) Пуассоновский процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$ непрерывен в среднем кубическим образом, т.е.

$$E|\xi(t+s) - \xi(t)|^2 = \begin{cases} \text{с.к. непрерывные} \\ \text{приращение, } t=0 \end{cases} =$$

$$= E|\xi(s) - \xi(0)|^2 = E|\xi(s)|^2 = D\xi(s) + (E\xi(s))^2 = \lambda s + (\lambda s)^2 \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$$

2) Применим формулы:

$$E(\eta(t)) = \int_0^t E(\xi(s)) ds = \int_0^t \lambda s ds = \frac{\lambda s^2}{2} \Big|_0^t = \frac{\lambda t^2}{2}$$

$$\text{при } t \geq s: \text{cov}(\eta(t), \eta(s)) = E\left(\int_0^t \xi(t') dt' \int_0^s \xi(s') ds'\right) -$$

$$- E\left(\int_0^t \xi(t') dt'\right) E\left(\int_0^s \xi(s') ds'\right) = \int_0^t \int_0^s \lambda \min(s', t') ds' dt' =$$

$$= \int_0^t \int_0^s (E\xi(s')\xi(t') - E\xi(s')E\xi(t')) ds' dt' = \int_0^t \int_0^s \lambda \min(s', t') ds' dt' =$$

$$= \int_s^t \int_0^s \lambda s' ds' dt' + \int_0^s \int_t^s \lambda t' ds' dt' + \int_0^s \int_0^t \lambda t' ds' dt' = \frac{\lambda s^2}{6} (3t - s)$$

$$D(\eta(t)) = \text{cov}(\eta(t), \eta(t)) = \frac{\lambda t^2}{6} (3t - t) = \frac{\lambda t^3}{3}$$

Пуассоновский процесс: $\xi(t)$

$$1) E\xi(t) = \lambda t$$

$$2) D\xi(t) = \lambda t$$

$$3) \text{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \lambda \min(t, s)$$

$$4) \xi(0) = 0$$

15

Условие: Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

$$\xi_1 = \int_0^{\pi} \cos(t) dW(t), \quad \xi_2 = \int_0^{\pi} \sin(t) dW(t).$$

Найти: $M(\xi_1), M(\xi_2), D(\xi_1), D(\xi_2), \text{cov}(\xi_1, \xi_2)$

Решение:

1) Свойства стохастического интеграла:

a) $E(I(f)) = 0 \quad \forall f$

б) $E(I(f_1)I(f_2)) = \int_a^b f_1(t)f_2(t)dt$

в) $E(I^2(f)) = \int_a^b f^2(t)dt$

2) $\int_0^T (a\xi_1 + b\xi_2) d\xi_1 =$
 $= a \int_0^T \xi_1 d\xi_1 + b \int_0^T \xi_2 d\xi_1$

2) $E(\xi_1), E(\xi_2) = 0$ по свойствам

3) $D(\xi_1) = E(\xi_1)^2 = \int_0^{\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\pi} =$

$= \frac{\pi}{2}$
 $D(\xi_2) = E(\xi_2)^2 = \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$

3) $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = E \xi_1 \xi_2 - E \xi_1 E \xi_2 = E \xi_1 \xi_2 =$
 $= \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \sin^2(t) \Big|_0^{\pi} = 0.$

[6]

Условие: Корреляционная ρ -ная стационарного процесса равна $R(\tau) = \exp\{-\tau^2\}$. Найти спектральную плотность $f(\lambda)$.
 Также, дана спектральная плотность $f(\lambda) = \exp\{-|\lambda|\}$, найти $k(\tau)$.

Решение:

$$1) f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\lambda} R(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\lambda} e^{-\tau^2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(i\tau\lambda + \tau^2)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau^2 + i\tau\lambda + \frac{(i\lambda)^2}{4} - \frac{(i\lambda)^2}{4})} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau + \frac{i\lambda}{2})^2 + \frac{(i\lambda)^2}{4}} d\tau = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau + \frac{i\lambda}{2})^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

$$2) k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} e^{-|\lambda|} d\lambda = \int_{-\infty}^0 e^{it\lambda} e^{\lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{it\lambda} e^{-\lambda} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(it+1)\lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{(it-1)\lambda} d\lambda = \frac{e^{(it+1)\lambda}}{it+1} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{(it-1)\lambda}}{it-1} \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{it+1} - 0 + 0 - \frac{1}{it-1} = \frac{-2}{(it)^2 - 1} = \frac{2}{t^2 + 1}$$

17] Найдите $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

-1-

$$h(t) = \exp(-t), t > 0$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) w(s) ds, \quad \eta(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) w(s) ds.$$

~~Найти~~ Найти МО, дисперсию и корреляционную функцию для $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

$$1) E \xi(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. Винер} \\ \text{процесс} \\ \text{неупр. бернсовск} \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^t E(h(t-s) w(s)) ds = 0 \quad (\text{т.к. } E w(s) = 0)$$

$$2) \text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = \\ = \text{cov} \left[\int_{-\infty}^{t_1} h(t_1-s_1) w(s_1) ds_1, \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2-s_2) w(s_2) ds_2 \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1-s_1) h(t_2-s_2) \text{cov}(w(s_1), w(s_2)) ds_1 ds_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \exp(s_1) \exp(s_2) \text{cov}(w(s_1), w(s_2)) ds_1 ds_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{свойство} \\ \text{винера} \\ \text{Рундана} \end{array} \right\} =$$

$$= \exp\{-(t_1+t_2)\} \cdot \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \exp(s_1+s_2) \underbrace{\text{cov}(w(s_1), w(s_2))}_{\min(s_1, s_2)} ds_1 ds_2 =$$

$$= \exp\{-(t_1+t_2)\} \cdot \left[\int_{t_2}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \exp(s_1+s_2) \cdot s_2 ds_2 ds_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_1} \exp(s_1+s_2) \cdot s_1 ds_1 ds_2 \right] = \exp\{-(t_1+t_2)\} \cdot \left[\int_{t_2}^{t_1} \left(\exp(s_1+t_2) - \exp(s_1+t_2) \right) ds_1 + \int_{-\infty}^{t_2} \left(\exp(s_1+t_2) - \exp(s_1+t_2) \right) ds_1 \right]$$

$$I_1 = \int_{t_2}^{t_1} \left[\exp(s_1+t_2) s_2 \Big|_{s_2=-\infty}^{s_2=t_2} - \int_{-\infty}^{t_2} \exp(s_1+s_2) ds_2 \right] ds_1 =$$

$$= \int_{t_2}^{t_1} \left[t_2 \exp\{s_1+t_2\} - \exp(s_1+t_2) \Big|_{s_2=-\infty}^{s_2=t_2} \right] ds_1 =$$

$$= t_2 \int_{t_2}^{t_1} \exp\{s_1+t_2\} ds_1 - \int_{t_2}^{t_1} \exp(s_1+t_2) ds_1 = t_2 \exp\{s_1+t_2\} \Big|_{s_1=t_2}^{s_1=t_1} - \exp(s_1+t_2) \Big|_{s_1=t_2}^{s_1=t_1} =$$

$$= (t_2-1) (\exp\{t_1+t_2\} - \exp\{2t_2\}).$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{s_1} \exp\{s_1 + s_2\} \cdot s_2 \, ds_2 \, ds_1 = \int_{-\infty}^{t_2} \left[\exp\{s_1 + s_2\} \cdot s_2 \right]_{s_2 = -\infty}^{s_2 = s_1} \\
 &= \int_{-\infty}^{t_2} \exp\{s_1 + s_2\} \, ds_2 \Big|_{s_2 = -\infty}^{s_2 = s_1} = \int_{-\infty}^{t_2} \left[\exp\{2s_1\} \cdot s_1 - \exp\{s_1 + s_2\} \right]_{s_2 = -\infty}^{s_2 = s_1} ds_1 \\
 &= \frac{s_1 \exp\{2s_1\}}{2} \Big|_{s_1 = -\infty}^{s_1 = t_2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t_2} \exp\{2s_1\} \, ds_1 - \frac{\exp\{2s_1\}}{2} \Big|_{s_1 = -\infty}^{s_1 = t_2} = \\
 &= \frac{t_2 \exp\{2t_2\}}{2} - \frac{\exp\{2s_1\}}{2 \cdot 2} \Big|_{s_1 = -\infty}^{s_1 = t_2} - \frac{\exp\{2t_2\}}{2} = \\
 &= \frac{t_2 \exp\{2t_2\}}{2} - \frac{3 \exp\{2t_2\}}{4} = \exp\{2t_2\} \left(\frac{t_2}{2} - \frac{3}{4} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{-\infty}^{t_2} \int_{s_1}^{t_2} \exp(s_1 + s_2) \cdot s_1 \, ds_2 \, ds_1 = \int_{-\infty}^{t_2} \left[s_1 \exp\{s_1 + s_2\} \right]_{s_2 = s_1}^{s_2 = t_2} \\
 &= \int_{-\infty}^{t_2} \left[s_1 \exp\{s_1 + t_2\} - s_1 \exp\{2s_1\} \right] ds_1 = \\
 &= \int_{-\infty}^{t_2} s_1 \exp\{s_1 + t_2\} \, ds_1 - \int_{-\infty}^{t_2} s_1 \exp\{2s_1\} \, ds_1 = \\
 &= (s_1 \exp\{s_1 + t_2\}) \Big|_{s_1 = -\infty}^{s_1 = t_2} - \exp\{s_1 + t_2\} \Big|_{s_1 = -\infty}^{s_1 = t_2} \\
 &= \frac{(s_1 \exp\{2s_1\})}{2} \Big|_{s_1 = -\infty}^{s_1 = t_2} + \frac{\exp\{2s_1\}}{2 \cdot 2} \Big|_{s_1 = -\infty}^{s_1 = t_2} = \frac{t_2 \exp\{2t_2\}}{2} - \exp\{2t_2\} \\
 &= \exp\{2t_2\} \left(\frac{t_2}{2} - 1 \right) + \frac{\exp\{2t_2\}}{2 \cdot 2} = \exp\{2t_2\} \left(\frac{t_2}{2} - \frac{3}{4} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + I_3 = (t_2 - 1) (\exp\{t_1 + t_2\} - \exp\{2t_2\}) + \exp\{2t_2\} \left(\frac{t_2}{2} - \frac{3}{4} \right) \\
 &+ \exp\{2t_2\} \left(\frac{t_2}{2} - \frac{3}{4} \right) = (t_2 - 1) \exp\{t_1 + t_2\} + \exp\{2t_2\} \left((t_2 - 1) + \frac{t_2}{2} - \frac{3}{4} \right) \\
 &+ \frac{t_2}{2} - \frac{3}{4} = (t_2 - 1) \exp\{t_1 + t_2\} + \exp\{2t_2\} \left(-\frac{1}{2} \right) \\
 \omega(s(t), s(s)) &= \exp\{-(t_1 + t_2)\} I = \exp\{-(t_1 + t_2)\} \left((t_2 - 1) e^{-\frac{t_1 + t_2}{2}} e^{t_2} \right) = \\
 &= t_2 - 1 - e^{t_2 - t_1}
 \end{aligned}$$

$$D\xi(t) = \text{cov}(\xi(t), \xi(t)) = t - 1 - \frac{1}{2}e^{t-t} = \underline{t - \frac{3}{2}}$$

3) $\eta(t)$:

$$E\eta(t) = E \int_{-\infty}^t h(t-s) dW(s) = 0 \quad (\text{т.к. стохастический интеграл?})$$

при $t_1 > t_2$

$$\text{cov}(\eta(t_1), \eta(t_2)) = E\eta(t_1)\eta(t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1-s) h(t_2-s) dW(s) \quad \text{⊖}$$

нужно определить $h(t) = \begin{cases} \exp(-t), & t > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\text{⊖} \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1-s) h(t_2-s) dW(s) + \int_{t_2}^{t_1} \underbrace{h(t_1-s)}_0 \underbrace{h(t_2-s)}_0 dW(s) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_2} \exp(s-t_1) \exp(s-t_2) dW(s) = \exp\{-(t_1+t_2)\} \int_{-\infty}^{t_2} \exp(2s) dW(s) = ?$$

$$= \exp\{-(t_1+t_2)\} \cdot \frac{1}{2} \exp\{2s\} \Big|_{s=-\infty}^{s=t_2} = \frac{e^{-(t_1+t_2)} \cdot e^{2t_2}}{2} = \frac{e^{t_2-t_1}}{2}$$

если $t_2 < t_1$, то $\text{cov}(\eta(t_1), \eta(t_2)) = \frac{1}{2}e^{t_1-t_2}$

$$D\eta(t) = \text{cov}(\eta(t), \eta(t)) = \frac{1}{2}e^{t-t} = \frac{1}{2}$$

[8]

Условие: Случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = -\xi(t)dt + d\eta(t), t \geq 0$$

Найти общий вид решения этого уравнения.

Решение:

1) Осное решение имеет вид: $\xi(t) = w(t, 0)\xi(0) + \int_0^t w(t, s)d\eta(s)$,
 где $w(t, s)$ - фундаментальное решение: $\frac{d}{dt}w(t, s) = Aw(t, s), t > s$

где $d\xi(t) = A\xi(t)dt + d\eta(t), t \geq 0$
 т.е. $A = -1$.

$$\frac{d}{dt}w(t, s) = \begin{cases} -w(t, s), & t > s \\ w(s, s) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dw} = -dt \Rightarrow \ln w = -t + C \quad w = Ce^{-t}$$

$$w(s, s) = Ce^{-s} = 1 \Rightarrow C = e^s$$

$$\Rightarrow w = e^{-t+s}$$

$$w(t, 0) = e^{-t}$$

Ответ: $\xi(t) = e^{-t}\xi(0) + \int_0^t e^{-t+s}d\eta(s)$

9

Условие: Стационарный процесс $f(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$. Показать, что этот процесс является дифференцируемым в среднем квадратическом и найти корреляционную функцию для производной.

Решение:

1) $\exists$ производной в среднем квадратическом $(\Leftrightarrow)$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 f(\lambda) d\lambda < \infty$$

Посчитаем интеграл: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^0 \lambda^2 \exp(\lambda) d\lambda + \int_0^{+\infty} \lambda^2 \exp(-\lambda) d\lambda =$

$$= e^{\lambda} \lambda^2 \Big|_{-\infty}^0 - 2 \int_{-\infty}^0 \lambda \exp(\lambda) d\lambda - e^{-\lambda} \lambda^2 \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda} d\lambda =$$

$$= 0 - 2 \left(\lambda e^{\lambda} \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^{\lambda} d\lambda \right) - 0 + 2 \left(-\lambda e^{-\lambda} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} d\lambda \right) =$$

$$= -2 \left(0 - e^{\lambda} \Big|_{-\infty}^0 \right) + 2 \left(0 - e^{-\lambda} \Big|_0^{+\infty} \right) = 2 + 2 = 4 < \infty$$

$\Rightarrow$ диф. в сред. квадратическом.

2) $f_z(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ — спектральная характеристика линейного преобразования

$\varphi(\lambda) = i\lambda$ — ПОЧЕМУ?

~~$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} f(t) dt$~~

$$f_z(\lambda) = |i\lambda|^2 \exp\{-|\lambda|\} = \lambda^2 \exp\{-|\lambda|\}$$

~~$k_z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$~~

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda} f_z(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda} \lambda^2 e^{-|\lambda|} d\lambda = \left\{ \text{используем} \right\} =$$

$$= - \frac{4(\tau^2 - 1)}{(\tau^2 + 1)^3}$$

Условие: Случайный процесс $\xi(t)$ имеет среднее 0 и корреляционную функцию $\cos(t-s)$. Найти корреляционную функцию для процесса $\eta(t) = \xi(t) + \xi'(t)$

Решение: 0) $E \xi(t) = 0 \Rightarrow E \xi'(t) = 0$

$$1) K_{\xi}(t, s) = \text{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \cos(t-s) = E \xi(t) \xi(s) - \overset{0}{E \xi(t)} \overset{0}{E \xi(s)} = E \xi(t) \xi(s)$$

~~$$K_{\xi'}(t, s) = \text{cov}(\xi'(t), \xi'(s)) = \frac{\partial^2 K_{\xi}}{\partial t \partial s} = -\cos(t-s)$$~~

$$K_{\xi'} = \text{cov}(\xi'(t), \xi'(s)) = \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial s} = \cos(t-s)$$

$$\begin{aligned} 2) K_{\eta}(t, s) &= \text{cov}(\eta(t), \eta(s)) = E(\eta(t) \eta(s)) - \overset{0}{E \eta(t)} \overset{0}{E \eta(s)} = \\ &= E((\xi(t) + \xi'(t))(\xi(s) + \xi'(s))) = E[\xi(t) \xi(s) + \xi(t) \xi'(s) + \\ &\quad + \xi'(t) \xi(s) + \xi'(t) \xi'(s)] = E \xi(t) \xi(s) + E \xi(t) \xi'(s) + \\ &\quad + E \xi'(t) \xi(s) + E \xi'(t) \xi'(s) = \cancel{K_{\xi}(t, s)} + \frac{\partial K_{\xi}}{\partial s} + \\ &\quad + \frac{\partial K_{\xi}}{\partial t} + \frac{\partial^2 K_{\xi}}{\partial t \partial s} = \cos(t-s) + \sin(t-s) - \sin(t-s) + \end{aligned}$$

$$+ \cos(t-s) = 2\cos(t-s)$$

11

Условие: $W(t), t \geq 0$ - стандартный винеровский процесс.

Образует случайную последовательность по уравн. $\xi_n = W(n) - W(n-1), n \geq 1$.

Доказать, что это стационарная в широком смысле случайная последовательность.

Решение:

Стандартный винеровский процесс:

1) $E(W(t)) = 0$

2) $\text{cov}(W(t), W(s)) = \sigma^2 \min(t, s) = \min(t, s), \sigma^2 = 1$

1) По свойствам винеровского процесса

$E W(t) = 0$

$\Rightarrow E \xi_n = 0$

2) $\text{cov}(\xi(t), \xi(s)) = E(\xi(t)\xi(s)) - E\xi(t)E\xi(s) =$

$= E \xi(t)\xi(s) = E((W(t) - W(t-1))(W(s) - W(s-1))) =$

$= E[W(t)W(s) - W(t)W(s-1) - W(t-1)W(s) + W(t-1)W(s-1)] =$

$= \text{cov}(W(t), W(s)) - \text{cov}(W(t), W(s-1)) - \text{cov}(W(t-1), W(s)) +$

$+ \text{cov}(W(t-1), W(s-1)) = \min(t, s) - \min(t, s-1) - \min(t-1, s) +$

$+ \min(t-1, s-1)$

a) $t > s$ (т.к. $t, s \in \mathbb{N}$, то $t-1 \geq s$)

$\text{cov}(\xi(t), \xi(s)) = s - (s-1) - s + s-1 =$

$= 0$

б) $t = s$

$\text{cov} = t - (s-1) - (t-1) + (t-1) = 1 + 0 \cdot (s-t)$

~~c) $t < s$ (т.к. $t, s \in \mathbb{N}$, то $t \leq s-1$)~~

~~$\text{cov} = t - (s-1) - (t-1) + (t-1) = t - s + 1$~~

3) $D(\xi(n)) = D(W(n) - W(n-1)) = E(W(n) - W(n-1))^2 - (E(W(n) - W(n-1)))^2 =$

$= E W^2(n) - 2E W(n)W(n-1) + E W^2(n-1) = D W(n) - 2\text{cov}(W(n), W(n-1)) +$

$+ D W(n-1) = \sigma^2 - 2(t-1) + \sigma^2(t-1) = \left\{ \begin{matrix} \sigma^2 = 1 \\ \text{т.к. стандартный} \end{matrix} \right\} =$

$= 1 - 2 + 2 + 1 - 1 = 1$ или $D(\xi(n)) = \text{cov}(\xi(n), \xi(n)) = 1$

$E(\xi(n))^2 = D \xi(n) - (E \xi(n))^2 = D \xi(n) = 1 < \infty$

$\Rightarrow$ стационарная в широком смысле

$\xi(n)$ - стационарный в широком смысле, если

1) $E(|\xi(t)|^2) < \infty \quad \forall t$

2) $E(\xi(t)) = a \quad \forall t$

3) $\text{cov}(\xi(t), \xi(s)) = k(t-s), \forall t, s$

k - корреляционная

Условие: Стационарная посл-ть $\xi(n)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = 10 + 6\cos\lambda = |3 + e^{-i\lambda}|^2$. По наблюдениям $\xi(n), n \leq 0$, найти оптимальный линейный прогноз на один шаг.

Решение

1) Представим $f(\lambda) = |f_1(\lambda)|^2$, где $f_1(\lambda) \in L_{\leq 0}$

$$f_1 = 3 + e^{-i\lambda}$$

2) Занедем функцию $h_m \cdot f_1$ и разложим ее в ряд Фурье.

$m=1$ (т.к. один шаг)

$$h_m = e^{im\lambda}$$

$$h_1 = e^{i\lambda}, \quad h_1 \cdot f_1 = e^{i\lambda}(3 + e^{-i\lambda}) = 1 + 3e^{i\lambda}$$

3) Представим $f_1 h_1 = k_1 + k_2$, где $k_1 \in L_{\leq 0}, k_2 \in L_{> 0}$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 3e^{i\lambda}$$

4) Разложим k_1 и f_1 в ряд Фурье:

$$k_1 = \sum_{n \leq 0} a_n e^{in\lambda}, \quad f_1 = \sum_{n \leq 0} b_n e^{in\lambda}$$

где разложения

5) Найдем q -ую $g(\lambda)$ и q -ую $g(\lambda) f_1 = k_1$

$$g(\lambda) = \sum_{n \leq 0} \hat{c}_n e^{in\lambda}$$

$$\sum_{n \leq 0} \hat{c}_n e^{in\lambda} (3 + e^{-i\lambda}) = 1$$

$$\sum_{n \leq 0} 3\hat{c}_n e^{in\lambda} + \sum_{n \leq 0} \hat{c}_n e^{i(n-1)\lambda} = 1$$

$$n=0: \quad 3\hat{c}_0 = 1 \Rightarrow \hat{c}_0 = \frac{1}{3}$$

$$n < 0: \quad 3\hat{c}_n + \hat{c}_{n+1} = 0$$

$$\hat{c}_n = -\frac{\hat{c}_{n+1}}{3}$$

$$\hat{c}_n = -(-3)^{n-1}$$

6) Оптимальный прогноз:

$$\hat{\xi}_1 = \sum_{n \leq 0} \hat{c}_n \xi(n) = -\sum_{n \leq 0} (-3)^{n-1} \xi(n)$$

13

Условие: Найти наилучшую линейную оценку гл. Бор.

η в пространстве $L = \{a\xi_1 + b\xi_2\}$, где $M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\eta) = 0$

$$D(\xi_1) = D(\xi_2) = 4, \quad \text{cov}(\xi_1, \eta) = 1, \quad \text{cov}(\xi_2, \eta) = -1, \quad \text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 1$$

1) $\hat{\eta}$ - наилучшая линейная оценка гл. η

$$\hat{\eta} = \hat{a}\xi_1 + \hat{b}\xi_2$$

2) Лемма о перпендикулярности:

$$(\eta - \hat{\eta}, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in L$$

$$\xi = a\xi_1 + b\xi_2$$

$$\begin{aligned} (\eta - \hat{\eta}, \xi) &= E[(\eta - \hat{\eta})\xi] = E[(\eta - \hat{a}\xi_1 - \hat{b}\xi_2)(a\xi_1 + b\xi_2)] = \\ &= aE(\eta\xi_1) + bE(\eta\xi_2) - a\hat{a}E(\xi_1^2) - \hat{a}\hat{b}E(\xi_1\xi_2) - a\hat{b}E(\xi_1\xi_2) - \\ &\quad - b\hat{b}E(\xi_2^2) = a - b - 4a\hat{a} - \hat{a}\hat{b} - a\hat{b} - 4b\hat{b} = 0 \end{aligned}$$

3) Подставим вместо (a, b) : $(0, 1)$, $(1, 0)$

$$\begin{cases} -1 - \hat{a} - 4\hat{b} = 0 \\ 1 - 4\hat{a} - \hat{b} = 0 \end{cases}$$

$$5 + 15\hat{b} = 0$$

$$\hat{b} = -3$$

$$4\hat{a} = 1 - \hat{b}$$

$$4\hat{a} = 4$$

$$\hat{a} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\eta} = \xi_1 - 3\xi_2}$$

$$D(\xi) = E(\xi)^2 - (E\xi)^2$$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) =$$

$$= E(\xi_1\xi_2) - E\xi_1 E\xi_2$$

14

Условие: Для $t \in [0, 1]$ задан процесс с
стохастическим дифференциалом $d\zeta(t) = (\alpha_1 t + \alpha_2 t^3) dt + d\gamma_0(t)$.
Выписать вид оптимальных оценок $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$.

Решение: 1) Обозначим оптимальные оценки $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$

$$\theta(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t), \quad \varphi_1(t) = t, \quad \varphi_2(t) = t^3$$

$$B = (b_{ij}) \text{ где } b_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt$$

$$b_{11} = \int_0^1 t \cdot t dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$b_{12} = \int_0^1 t \cdot t^3 dt = \int_0^1 t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$b_{21} = b_{12} = \frac{1}{5}$$

$$b_{22} = \int_0^1 t^3 \cdot t^3 dt = \int_0^1 t^6 dt = \frac{t^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2) B^{-1} : & \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{5} & 3 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{5} & 3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{175} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{5} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{105}{4} & \frac{175}{4} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{75}{4} & \frac{105}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{105}{4} & \frac{175}{4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$C = B^{-1} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ -21 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4) c_1(t) &= c_{11} \varphi_1(t) + c_{12} \varphi_2(t) = \frac{5}{4} (15t - 21t^3) \\ c_2(t) &= c_{21} \varphi_1(t) + c_{22} \varphi_2(t) = \frac{5}{4} (-21t + 35t^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \hat{\alpha}_1 &= \int_0^1 c_1(t) d\zeta(t) = \frac{5}{4} \int_0^1 (15t - 21t^3) d\zeta(t) \\ \hat{\alpha}_2 &= \int_0^1 c_2(t) d\zeta(t) = \frac{5}{4} \int_0^1 (-21t + 35t^3) d\zeta(t) \end{aligned}$$

Ответ.

115

Условие: При движении по некоторому лабиринту Вет в первый раз сворачиваете равновероятно направо или налево. Далее на каждой развилке с вероятностью 0.7 сворачиваете туда же, что и в предыдущий раз, а с вероятностью 0.3 в противоположную. Какова вероятность возврата налево:

налево:

- 1) на 3ей развилке
- 2) на 1000 развилке?

Решение:

1) начальные вероятности: $p^{(0)} = (0.5 \ 0.5)$

матрица переходов: $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

На каждом шаге вероятности состояний меняются так:

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} \cdot P$$

$$2) \ p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P = p^{(0)} \cdot P^2 = (0.5 \ 0.5) \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}^2 = [0.5 \ 0.5]$$

$\Rightarrow$ на 3ей развилке вероятность возврата налево = 50%

3) Т.к. матрица переходов симметричная, то начальные вероятности не изменяются ни на какой итерации т.е. на 1000-ой развилке - 50%.

ЛИБО ТАК

$$\begin{cases} p^{(1000)} = p^{(1000)} \cdot P \\ p_1^{(1000)} + p_2^{(1000)} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1^{(1000)} = p_{11} p_1^{(1000)} + p_{12} p_2^{(1000)} \\ p_2^{(1000)} = p_{21} p_1^{(1000)} + p_{22} p_2^{(1000)} \\ p_1^{(1000)} + p_2^{(1000)} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1^{(1000)} = 0.7 p_1^{(1000)} + 0.3 p_2^{(1000)} \\ p_2^{(1000)} = 0.3 p_1^{(1000)} + 0.7 p_2^{(1000)} \\ p_1^{(1000)} + p_2^{(1000)} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1^{(1000)} = p_2^{(1000)} = 0.5$$

Ответ: а) 50%
б) 50%

16

Условие: Пусть цепь Маркова с непрерывным временем имеет два состояния и следующую матрицу интенсивностей перехода:

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ Используя уравнения Колмогорова, найти вероятности перехода $P_{ij}(t), t \geq 0$.

Решение

1) Уравнения Колмогорова: $\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_k a_{kj} P_{ik}$

известно: $P_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$2) \frac{d}{dt} P_{11}(t) = a_{11} P_{11} + a_{21} P_{12} = -2P_{11} + 4P_{12}$$

$$\frac{d}{dt} P_{12}(t) = a_{12} P_{11} + a_{22} P_{12} = 2P_{11} - 4P_{12}$$

$$\frac{d}{dt} P_{21}(t) = a_{11} P_{21} + a_{21} P_{22} = -2P_{21} + 4P_{22}$$

$$\frac{d}{dt} P_{22}(t) = a_{12} P_{21} + a_{22} P_{22} = 2P_{21} - 4P_{22}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_{11} + \frac{d}{dt} P_{12} = 0 \\ \frac{d}{dt} P_{21} + \frac{d}{dt} P_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{11} + P_{12} = C_1 \\ P_{21} + P_{22} = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \quad \text{т.к. сумма вероятностей во время равна 1.}$$

3) Подставим:

$$a) P'_{11}(t) = -2P_{11} + 4(1 - P_{11}) = 4 - 6P_{11}$$

однородное: $P'_{11} = -6P_{11}$
 $P_{11}(t) = C e^{-6t}$

неоднородное: $P_{11}(t) = C(t) e^{-6t}$

$$C'(t) e^{-6t} - 6C(t) e^{-6t} = 4 - 6C(t) e^{-6t}$$

$$C' e^{-6t} = 4$$

$$\frac{dC}{4} = e^{6t} dt$$

$$C = \frac{4}{6} e^{6t} + C_1$$

$$\Rightarrow P_{11}(t) = \left(\frac{2}{3} e^{6t} + C_1 \right) e^{-6t}$$

$$P_{11}(t) = C_1 e^{-6t} + \frac{2}{3}$$

$$P_{11}(0) = 1$$

$$\Rightarrow P_{11}(t) = \frac{1}{3} e^{-6t} + \frac{2}{3}$$

$$b) P'_{12} = 2(1 - P_{12}) - 4P_{12} = 2 - 6P_{12}$$

$$P_{12}(t) = C_1 e^{-6t} + \frac{1}{3} \Rightarrow P_{12}(t) = -\frac{1}{3} e^{-6t} + \frac{1}{3}$$

$$P_{12}(0) = 0$$

$$b) P'_{21} = -2P_{21} + 4(1 - P_{21}) = 4 - 6P_{21}$$

$$P_{21}(t) = C_1 e^{-6t} + \frac{2}{3} \Rightarrow P_{21}(t) = -\frac{2}{3} e^{-6t} + \frac{2}{3}$$

$$P_{21}(0) = 0$$

$$2) P'_{22} = 2(1 - P_{22}) - 4P_{22} = 2 - 6P_{22}$$

$$P_{22}(t) = C_1 e^{-6t} + \frac{1}{3} \Rightarrow P_{22}(t) = \frac{2}{3} e^{-6t} + \frac{1}{3}$$

$$P_{22}(0) = 1$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} e^{-6t} + \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} e^{-6t} + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} e^{-6t} + \frac{2}{3} & \frac{2}{3} e^{-6t} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$